ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 1999, том 35, № 2, с. 50–60

НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

РЕАЛЬНЫЕ ОПЦИОНЫ: ОПТИМАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ИНВЕСТИРОВАНИЯ

© 1999 г. Е. А. Ковалишин, А. Б. Поманский
(Москва)

Рассматривается опционный подход к анализу эффективности инвестиций в условиях неопределенности, дается краткая характеристика основных моментов теории реальных опционов, анализируется опционная модель Ингерсолла–Росса. Разработана и практически реализована методика определения оптимального времени инвестирования, а также сделан ряд выводов относительно практического применения стохастических процессов при исследовании инвестиционных проектов.

ВВЕДЕНИЕ

Прежде чем принять решение относительно финансирования того или иного проекта, любой инвестор взвешивает все за и против. В настоящее время анализ эффективности инвестиционного проекта проводится с помощью ставших уже классическими методов: расчета срока окупаемости, внутренней нормы доходности, чистой приведенной стоимости и т.п. На основе полученных результатов инвестор принимает свое стратегическое решение.

Всегда ли подобная схема анализа приводит к адекватной оценке стоимости проекта и оптимальному инвестиционному решению? Для ответа на этот вопрос возьмем простейший пример. Предположим, что некоторая фирма рассматривает возможность финансирования инвестиционного проекта, предусматривающего первоначальные вложения в размере 100 млн. руб. Через один год в рамках завершения проекта фирма получит 110 млн. руб. Проект является абсолютно безрисковым, фирма может привлекать и размещать деньги на рынке под 11% годовых (для простоты будем считать, что процентная ставка не зависит от срока кредитования, т.е. временная структура процентной ставки является "плоской"). В данных условиях расчет чистой приведенной стоимости (NPV) показывает, что проект является убыточным – его NPV отрицательна на уровне –0.9 млн. руб.

Используя проведенные выше расчеты, руководство фирмы решает отказаться от идеи финансирования проекта и, когда ей поступает соответствующее деловое предложение, продает права на данный проект другому инвестору за 10 тыс. руб. Через месяц ставки на рынке снижаются до 9% годовых, и альтернативный инвестор, рассчитав новое NPV (оно составит около 917 тыс. руб.), начинает финансирование. В результате этой операции он получит свыше девятисот тысяч прибыли за одномесячную отсрочку инвестирования.

Вообще говоря, большинство реальных инвестиционных проектов действительно предусматривают право инвестора на отсрочку финансирования. При этом данное право порождается не только владением различными патентами, лицензиями, месторождениями или землей. В общем случае оно является результатом того, какую рыночную позицию имеет фирма-инвестор, каким человеческим капиталом она обладает, какую политику проводит. Разработка новейшей технологии позволяет фирме на какое-то время стать монополистом в своей области. В этом случае ее руководство получает право определения времени начала финансирования в рамках некоторого периода времени.

Отсрочка инвестирования позволяет, с одной стороны, в полной мере использовать информацию, которая будет доступна в будущем, а с другой – порождает издержки, связанные с отложенным получением прибыли от проекта или риском входа конкурентов. Поэтому для любого инвестора крайне важно определить оптимальное время открытия финансирования проекта.

Строго говоря, большинство инвестиционных решений базируются на трех основных характеристиках. Во-первых, инвестиции частично или полностью необратимы. Другими словами, первоначальные расходы, связанные с инвестиционным проектом, являются безвозвратными (sunk costs), т.е. их нельзя полностью вернуть в том случае, если после начала инвестиционного процесса вы внезапно решили отозвать свои средства. Во-вторых, в реальной жизни ожидаемое вознаграждение на вложенные ресурсы не является определенным, поэтому в лучшем случае в результате анализа можно получить вероятностные характеристики, которые могут повлиять на инвестиционную привлекательность того или иного проекта. Наконец, абсолютное большинство инвесторов имеют некоторую свободу относительно времени принятия решения об инвестировании. Часто инвестиции можно отложить на некоторое время до получения дополнительной информации, которая будет доступна в будущем.

Существующие классические методы анализа эффективности инвестиций не учитывают в полной мере перечисленные выше факторы, присутствующие в реальной жизни, и поэтому не всегда дают правильный результат, рекомендуя инвестировать, например, в случае только неотрицательности чистой приведенной стоимости.

Необходимо подчеркнуть, что классические методы теоретически могут использоваться при проектном анализе, если с их помощью оценить эффективность инвестиций для каждого из возможных сценариев развития. Как будет показано далее (см., в частности, уравнение (10)), опционный подход, анализируемый в настоящей работе, по сути максимизирует величину чистой приведенной стоимости проекта по всем возможным состояниям.

В реальной жизни инвестор в значительной степени опирается на свой опыт и интуицию, поэтому он всегда требует отдачи от проекта большей, чем это определяется классической финансовой теорией. На практике большинство инвесторов, принимая решение относительно инвестирования, подчас подсознательно устанавливают пороговую отдачу от проекта, в три-четыре раза превышающую издержки по привлечению капитала. Другими словами, фирмы начинают финансировать проект только в том случае, когда чистая приведенная стоимость проекта достаточно велика (и, конечно, положительна). С другой стороны, фирмы не отказываются от уже начатого проекта, даже если цены падают значительно ниже средних переменных издержек.

В последнее время в мировой экономической науке активное развитие получила так называемая теория реальных опционов, позволяющая описать подобного рода "интуицию рационального инвестора". Опционный подход полностью согласуется с существующими ортодоксальными методиками инвестиционного анализа и в полной мере учитывает неопределенность и безвозвратность инвестиций, а также право инвестора на отсрочку финансирования проекта.

КРАТКИЙ ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Основная идея опционного подхода заключается в следующем. Большинство инвестиционных проектов подразумевают некоторую свободу инвестора (ограниченную или неограниченную) относительно времени начала инвестирования. Таким образом, каждый проект включает в себя своеобразный опцион, право на ожидание. По своей сути это право аналогично финансовому опциону на покупку (точнее, американскому опциону колл[1]). Начиная финансирование проекта, инвестор реализует свой инвестиционный опцион и, следовательно, несет связанные с этим вмененные издержки. Эти издержки, равные стоимости опциона, необходимо учитывать при анализе эффективности любого инвестиционного проекта.

Достаточно развитая система оценки финансовых опционов позволяет в большинстве случаев явно оценить стоимость инвестиционного опциона и сформулировать условия, при которых действительно оптимально начинать финансирование. Практически во всех моделях, основанных на теории реальных опционов, определяется некоторое пороговое значение фазовой переменной. Как только текущее значение этой переменной достигает заданного порогового уровня, инвестор может приступать к инвестированию.

На сегодняшний день в мировой экономической литературе накоплено достаточно большое количество источников по теоретическому и практическому применению теории реальных опционов. К классическим трудам, посвященным опционному подходу в теории инвестирования, без сомнения можно отнести работы Ингерсолла, Росса [1, 2], Диксита и Пиндайка [3]. Эти авторы, основываясь на теории стохастических процессов, вывели аналитические формулы, описывающие поведение рационального инвестора. В первом случае рассматривалась случайная процентная ставка, при постоянных остальных параметрах, а во втором – случайная цена конечной продукции (в общем случае – проекта).

[1] Американский call-опцион дает своему держателю право в течение определенного промежутка времени потребовать поставки некоторого количества стандартных базовых ценностей по предварительно зафиксированной цене. В то же время держатель опциона не связан какими-либо обязательствами и может отказаться от реализации своего права при неблагоприятном изменении рыночной конъюнктуры.

Развитию теории реальных опционов также посвящен и ряд других работ. Так, МакДональд и Сигель в своей работе [4] анализировали безвозвратные инвестиции в предположении того, что выигрыши и начальные издержки инвестирования подчиняются стохастическим процессам. Используя технику опционного ценообразования они наглядно продемонстрировали, что проект будет принят лишь, когда его чистая приведенная стоимость достаточно велика. Кукерман [5], Бернанк [6] и Демерс [7] занимались разработкой соответствующих моделей, позволяющих оценить влияние постоянно прибывающей информации на отсрочку инвестирования. Достаточно полный обзор существующих на сегодняшний день моделей в рамках теории реальных опционов представлен в работе Шика [8].

Наряду с чисто теоретическими работами, в этой области имеется также и ряд эмпирических исследований в области электроэнергетики (Гербелот [9]), недвижимости (Титман [10]), ресурсодобывающих отраслей (Паддок, Сигель и Смит [11], Туриньс [12]) и др.

МОДЕЛЬ ИНГЕРСОЛЛА–РОССА (IR)

В данной работе мы более детально остановимся на одной из фундаментальных моделей в теории реальных опционов – модели, представленной Ингерсоллом и Россом в работах 1992, 1995 гг. Суть модели Ингерсолла–Росса (IR) вкратце сводится к следующему.

В рамках модели IR влияние колебаний процентных ставок на реальную стоимость проекта и время оптимального инвестирования анализируется на примере простейшего проекта, аналогичного вложению средств в государственную облигацию. Другими словами, суть проекта заключается в том, что инвестор в начальный момент времени t вкладывает I долл. с тем, чтобы в момент $t + T$ получить \$1 (в реальном выражении)[2]. При этом предполагается отсутствие неопределенности как относительно величины, так и относительно времени финального платежа. Кроме того, первоначальное вложение в размере I является единственным, т.е. инвестору нет необходимости производить дополнительные расходы сверх этой суммы, для того чтобы сохранить за собой инвестиционные права на проект и получить \$1 в момент $t + T$. Проект неделимый, и может быть принят лишь однажды. Наконец, финансирование данного проекта не оказывает влияния на какие-либо иные инвестиционные проекты или потенциальные возможности инвестора.

Стоимость проекта. Обозначим через $P(t, r, T)$ стоимость бескупонной облигации в момент времени t со сроком до погашения T. В общем случае стохастическая функция $r(t)$ характеризует динамику мгновенной ставки процента на рынке во времени[3]. В этом случае чистая приведенная стоимость проекта (его NPV) запишется как

$$P(t, r, T) - I \equiv E\left[\exp\left(-\int_t^{t+T} r(s)ds\right)\right] - I,$$

где E – математическое ожидание на основе эквивалентного мартингального стохастического процесса. Для акцентирования внимания на зависимости $P(\cdot)$ от текущего времени мы позволим себе упростить обозначение стоимости облигации до $P(t)$, подразумевая наличие параметров r и T. Таким образом, оптимальное время инвестирования является решением

$$\sup E[P(\tau) - I]\exp\left(-\int_0^{\tau} r(s)ds\right), \quad (1)$$

где τ – момент времени, когда наблюдаемая процентная ставка, подчиняющаяся случайному процессу, впервые опускается до порогового уровня (мы определим его позднее)[4].

[2] Вообще говоря, данная модель может применяться и в том случае, когда r является номинальной процентной ставкой, а величина начального вложения и финальной выплаты I и \$1 выражены в номинальных величинах. Аналогичным образом можно анализировать рискованные проекты с ожидаемой доходностью \$1, если r представляет собой ставку дисконта с учетом риска в номинальном или реальном выражении. В последнем случае, однако, ожидаемая доходность в \$ не должна зависеть от уровня процента.

[3] Здесь и далее мы будем всегда подразумевать реальную ставку процента, так как, строго говоря, использование номинального процента потребовало бы введения дополнительного случайного процесса для инфляции.

[4] Случайная величина τ является *временем остановки* (stopping time) стохастического процесса $\{x(t)\}$, если для любого t событие $\tau = t$ полностью определяется траекторией $\{x(s)\}_0^t$, т.е. предыдущей историей динамики процентной ставки.

Для случая постоянной (не зависящей от срока до погашения) неслучайной кривой доходности по государственным облигациям чистая приведенная стоимость проекта не меняется с течением времени, и, следовательно, инвестору необходимо немедленно инвестировать, если NPV положительно, или навсегда отказаться от финансирования данного проекта, если NPV отрицательно.

Для неслучайной кривой доходности, имеющей наклон (когда доходности "длинных" облигаций отличаются от доходностей "коротких"), необходимое условие первого порядка для максимума запишется в виде

$$\frac{I}{P(t^*)} = \frac{r(t^* + T)}{r(t^*)}. \tag{2}$$

Для того чтобы инвестор решился на финансирование данного проекта, NPV должно быть положительно $[P(t^*) > I]$. Отсюда следует, что для того чтобы в условиях определенности инвестор отложил капиталовложение, кривая процента должна иметь понижающийся характер $[r(t^* + T) < r(t^*)]$.

Анализ эффективности инвестиций в условиях неопределенной процентной ставки проводится сходным образом. Рассмотрим простейший случай, в котором динамика процентной ставки задается следующим образом:

$$dr = \sigma\sqrt{r}d\omega, \tag{3}$$

где dr – приращение мгновенной процентной ставки за малый промежуток времени, σ – константа, $d\omega$ – приращение стандартного винеровского процесса.

Как было показано в работах [13, 14], стоимость любого условного процентного требования (например, опциона на облигацию) удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$0.5\sigma^2 rF_{rr} + \lambda rF_r - rF + F_t + C(r, t) = 0, \tag{4}$$

где F – стоимость условного требования[5], $C(\cdot)$ – чистый денежный поток, выплачиваемый по данному условному требованию. В уравнении (4) параметр λ является так называемой "ценой процентного риска", т.е. для актива, цена которого P, $E(dP) = (rP - \lambda r dP/dr - C)dt$. Так как для облигаций $\partial P/\partial r < 0$, случай $\lambda > 0$ соответствует положительной временной премии. Вывод дифференциального уравнения (4) основывается на локальной гипотезе ожиданий, т.е. $E(dP/P) = rdt$, где E обозначает ожидаемое значение в отношении мартингальной динамики процентной ставки

$$dr = \lambda r dt + \sigma\sqrt{r}d\omega. \tag{5}$$

В данной модели коэффициент предполагается постоянным.

Для определения стоимости проекта и оптимальной инвестиционной политики в целом, разделим данную задачу на две части. Сначала определим стоимость проекта после того, как произведены начальные выплаты, а затем оценим стоимость прав на проект до начала финансирования.

Как только инвестор произведет начальный платеж I, проект становится полным аналогом покупки бескупонной облигации с номиналом \$1. Обозначим через $P(r, T)$ цену этой облигации (проекта) со сроком окончания T в текущий момент времени. Согласно выводам в [14] имеем

$$P(r, T) = e^{-b(T)r},$$

где

$$b(T) \equiv \frac{2(e^{\gamma T} - 1)}{(\gamma - \lambda)(e^{\gamma T} - 1) + 2\gamma}, \quad \gamma \equiv \sqrt{\lambda^2 + 2\sigma^2}.$$

Если процентная ставка равна r, то в момент начала финансирования проекта его чистая приведенная стоимость будет равна $P(r, T) - I$. Суммарная стоимость прав на проект должна быть, по крайней мере, не меньше этой величины. На самом же деле стоимость инвестиционного опциона оказывается значительно выше, чем NPV = $P(r, T) - I$. В этом случае оптимальная инвестиционная политика будет заключаться в следующем:

а) инвестировать, если $r \le r^*$;

б) не инвестировать, если $r > r^*$;

где пороговое значение процента r^* определяется в ходе принятия инвестиционного решения.

[5] Вообще говоря, функция $F = F(r, t)$, но для краткости мы позволим себе упростить запись этой функции просто до F. При этом здесь и далее нижний индекс обозначает частную производную функции по соответствующему аргументу.

Пороговое значение r^* является так называемой "плавающей границей", т.е. для каждого выбранного значения r^* можно оценить стоимость прав на проект. Оптимальный уровень r^* находится исходя из условия максимизации стоимости опциона, что, в свою очередь, предусматривает наличие соответствующих граничных условий (см., например, [15]).

Стоимость прав на проект и правило оптимального инвестирования. Обозначим через $R(r, T, I)$ стоимость неограниченных во времени, единовременных прав на проект, т.е. общее NPV проекта, включающее право на отсрочку финансирования. Величина R должна удовлетворять дифференциальному уравнению (4). В то же время, так как права на осуществление инвестиций считаются бесконечными, их стоимость до осуществления первого платежа не зависит от времени, с течением времени право на осуществление инвестиций до начала финансирования проекта не изменяется, т.е. $R_t = 0$. Кроме того, мы имеем три стандартных граничных условия

$$\begin{aligned} R(r^*) &= P(r^*, T) - I, \\ \lim_{r \to \infty} R(r) &= 0, \\ R_r(r^*) &= \partial P(r^*, T)/\partial r. \end{aligned} \tag{6}$$

Первое условие представляет собой не что иное, как чистую приведенную стоимость проекта при $r = r^*$, т.е. в момент начала финансирования стоимость проекта полностью определяется его NPV. Второе условие вытекает из того, что по мере роста ставки процента, уменьшается вероятность того, что в будущем r может упасть до приемлемого уровня. При $r \longrightarrow \infty$ стоимость инвестиционного опциона стремится к нулю вместе с чистой приведенной стоимостью проекта. Однако в силу того, что всегда остается некоторая вероятность снижения ставок до порогового уровня, стоимость инвестиционного опциона остается всегда положительной. Наконец, последнее граничное условие получается из предположения об отсутствии арбитража на рынке. Действительно, если данное условие не выполняется, то незначительное отклонение в ставке процента от своего порогового уровня привело бы к значительным временным потерям или неоправданному выигрышу инвестора (в зависимости от характера отклонения). Поэтому чуть более длительное ожидание являлось бы оптимальной стратегией, что противоречит определению r^* как пороговой ставки. Более строгое обоснование всех граничных условий можно найти в работе [3].

Общее решение уравнения (4) в данном случае является экспоненциальным вида:

$$C_1 \exp(-\nu r) + C_2 \exp(2r/\nu\sigma^2),$$

где $\nu \equiv \dfrac{\lambda + \gamma}{\sigma^2}$. Условия задачи Коши в совокупности с граничным условием на бесконечности (6) позволяют определить r^* из соотношения $\nu[P(r^*, T) - I] + b(T)P(r^*, T) = 0$. Именно при $r = r^*$ решение задачи Коши для (4) гарантирует, что $C_2 = 0$ или $\lim_{r\to\infty} R(r) = 0$. Следовательно, решение (4) с необходимыми условиями имеет вид

$$R(r, T, I) = \left(\frac{\nu - b(T)}{\nu I}\right)^{\nu/b(T)} \left(\frac{b(T)I}{\nu - b(T)}\right) e^{-\nu r}.$$

В этом случае пороговое значение процентной ставки будет равно

$$r^*(T, I) = \frac{1}{b(T)} \ln\left(\frac{\nu - b(T)}{\nu I}\right). \tag{7}$$

Отсюда видно, что данное пороговое значение процента отличается от безубыточной ставки (мгновенной ставки, при которой NPV проекта обращается в нуль)[6]

$$r^0(T, I) = -\frac{1}{b(T)} \ln I. \tag{8}$$

[6] Следует особо подчеркнуть, что r^0 не является внутренней ставкой доходности (IRR). Ставка безубыточности r^0 есть мгновенная ставка. Для проекта сроком T лет, внутренняя ставка доходности (ρ_T^0) является T-летней ставкой, при которой чистая приведенная стоимость проекта обращается в нуль. Зависимость между этими ставками выглядит следующим образом: $\rho_T^0 = -(1/T)\ln(I) = [b(T)/T]r^0(T, I)$. Аналогично, пороговая ставка является краткосрочной, а не T-летней. Пороговая T-летняя ставка запишется $\rho_T^* = [b(T)/T]r^*(T, I)$. Различия между мгновенными и T-летними ставками объясняются наличием положительной или отрицательной временной премии.

Из (7) и (8) получаем

$$r^*(T, I) = r^0 + \frac{1}{b(T)}\ln\left(\frac{\nu - b(T)}{\nu}\right) < r^0. \qquad (9)$$

Это означает, что проект будет принят только в том случае, когда инвестиционный опцион находится в "большом выигрыше", а не в точке безубыточности. С помощью обычного дифференцирования можно также показать, что функция разности ($r^0 - r^*$) монотонно растет с увеличением параметра σ, а при $\sigma = 0$, $r^* = r^0$. Таким образом, рост неопределенности в отношении будущих значений ставки процента оказывает дестимулирующее воздействие на инвестиционную активность. Этим, кстати говоря, можно объяснить нынешний низкий объем инвестиций в российской экономике. Значительные колебания основных макроэкономических показателей вынуждают инвесторов занимать выжидательную позицию (подробнее см. [16]).

Отметим также, что, согласно (7), r^*, вообще говоря, может принимать и отрицательные значения. При этом можно показать, что стохастический процесс (5), ввиду сингулярной особенности в нуле, не позволяет процентной ставке снизиться до отрицательного уровня (см. [13]). Таким образом, при отрицательном значении пороговой ставки проект принципиально не может быть принят.

В этой связи следует ввести некоторое дополнительное ограничение на сферу применения исходной модели IR. Для положительности $r^*(T, I)$ необходимо, чтобы выполнялось хотя бы одно из двух условий: либо первоначальные издержки проекта I достаточно малы, либо срок реализации проекта T не слишком велик. Более строго, проект имеет возможность когда-либо быть принятым, если $\sigma\sqrt{2TI} > \ln(2 - I)$.

Стоимость инвестиционного опциона может быть также выписана в явном виде

$$R(r) = e^{-\nu(r - r^*)}[e^{-b(T)r^*} - I]. \qquad (10)$$

Выражение в скобках есть не что иное, как NPV проекта на момент начала финансирования. Первый множитель является дисконтирующим фактором с момента начала инвестирования до настоящего времени

$$e^{-\nu(r - r^*)} = E\left[\exp\left(-\int_t^{\tau(r^*)} r(s)ds\right)\middle| r(t) = r\right], \qquad (11)$$

где $\tau(r^*)$ – момент времени, когда ставка r впервые падает до уровня r^*.

На рис. 1 представлена зависимость стоимости инвестиционного опциона (сплошная линия) и чистой приведенной стоимости простейшего проекта (пунктирная линия) от ставки процента. При ставке безубыточности r^0 NPV проекта обращается в нуль. Следует особо отметить тот факт, что хотя NPV может быть отрицательно при ставке выше безубыточного уровня, стоимость инвестиционного опциона всегда остается положительной (т.е. всегда существует некоторая вероятность благоприятного развития ситуации, что может привести к прибыльности проекта).

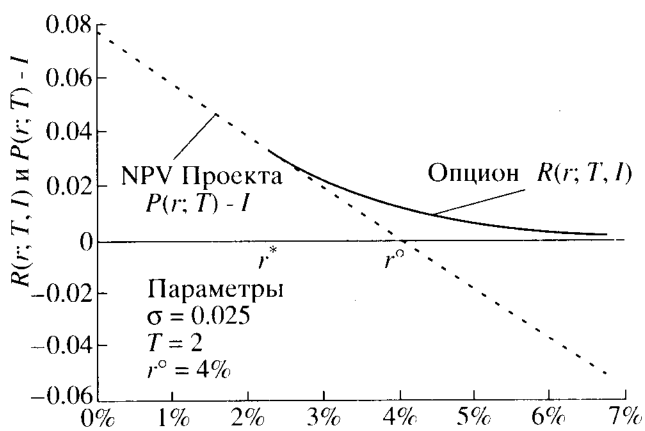

Рис. 1. Стоимость инвестиционного опциона и NPV проекта.

Разница между кривыми R и NPV представляет собой стоимость права на отсрочку инвестирования средств в осуществление проекта. По мере роста ставки процента на рынке, эта величина увеличивается. Чем более неблагоприятными являются условия в текущий момент времени, тем более ценно право, позволяющее инвестору выждать и, возможно в будущем, воспользоваться позитивными изменениями конъюнктуры. С другой стороны, чем меньше ставка процента (в нашем простейшем случае снижение ставки всегда является благоприятным явлением), тем скорее инвестор начнет финансирование. Однако пороговая ставка всегда будет меньше ставки безубыточности (в условиях неопределенности), так как, начав финансирование проекта, инвестор теряет право "выжидать".

В [2] была предложена оценка явной зависимости между T-летней пороговой ставкой и внутренней нормой доходности простейшего проекта (проекта с монотонно убывающей функцией NPV(r)). В этом случае $r_T^* \approx \mathrm{IRR} - \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$. Эта простая формула позволяет сделать один из основных выводов, вытекающих из теории реальных опционов, – инвестиционная активность определяется не только и не столько уровнем ставки процента, сколько степенью его стабильности. В данном случае параметром, описывающим стабильность ставок на рынке, является σ, с ее ростом (т.е. с ростом нестабильности на рынке) пороговое значение r^* падает вместе с инвестиционной активностью в целом. Необходимо также заметить, что разница между ставками зависит не от срока действия проекта, а от фактора неопределенности процентных ставок на рынке (в данном случае использовался процесс Ито для краткосрочной ставки $dr = \sigma\sqrt{r}\,d\omega$).

Стохастический процесс (5) во многих работах (в том числе и в работе Ингерсолла–Росса) используется с незначительными модификациями для описания поведения ставки процента на финансовом рынке. Несомненно, это один из наиболее удобных процессов при проведении теоретических расчетов. Однако вопрос относительно правомочности использования такого процесса и степени его адекватности и по сей день остается открытым. Ниже мы выскажем и обоснуем наше мнение по данному вопросу.

РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ

Основная масса моделей, использующих теорию реальных опционов, ограничивается получением порогового значения фазовой переменной, при этом вопрос относительно продолжительности ожидания благоприятных условий практически не рассматривается. На практике инвесторы, опираясь на собственный опыт, занимают выжидательную позицию, подчас вопреки классическому анализу эффективности инвестиций.

Актуальность расчета оптимальной временной отсрочки многократно возрастает в случае, если инвестиционные права инвестора на проект ограничены во времени. Данное ограничение может исходить как из условий контракта или лицензии (например, в случае разработки нефтяных месторождений), так и ввиду опасности входа конкурентов. Последний случай наиболее характерен в отношении проектов, связанных с НИОКР, когда аналогичные разработки конкурентов могут в значительной степени снизить отдачу от данного инвестиционного проекта. Если срок инвестиционных прав ограничен, то стоимость инвестиционного опциона будет кроме всего прочего зависеть и от текущего времени t. В этом случае на стоимость опциона накладывается еще одно стандартное краевое условие вида $R(r, T, I, t_0) = \max[P(r, T, t_0) - I, 0]$, где t_0 – момент времени, когда истекают права на осуществление инвестиций. Исходная задача становится аналогом задачи ценообразования для американского опциона колл и имеет численное решение (см. [7]).

В целом, информация относительно возможной продолжительности ожидания позволит инвестору более рационально использовать доступные ему ресурсы. Если оптимально необходимое время достаточно велико, инвестор может переключиться на более выгодные в этом смысле альтернативные проекты.

В данной работе нами была предпринята попытка оценить, с помощью методов имитационного моделирования, оптимальное время отсрочки инвестирования, фактически позволяющее рассчитать фактор дисконта $E[\exp(-\int_t^{\tau(r^*)} r(s)ds)\,|r(t) = r]$ для произвольного стохастического процесса.

Самый простой способ моделирования случайных процессов – это прямая пошаговая подстановка. Произвольно выбирая шаг решетки (в данном случае временной, т.е. Δt), можно момент за моментом проследить возможное поведение процентной ставки. В частности, для случая рассмотренной выше модели IR:

$$r_t = r_{t-1} + \Delta r,$$

$$\Delta r = \lambda r \Delta t + \sigma r^{1/2} \Delta\omega,$$

$$\Delta\omega = \varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

где ε – случайная величина, распределенная нормально с параметрами (0; 1).

Единственный недостаток прямого пошагового расчета заключается в его колоссальной трудоемкости. Самые высокопроизводительные на сегодняшний день ЭВМ не в состоянии обеспечить приемлемую скорость расчетов. Поэтому для данной задачи мы решили использовать одну из методик ускорения расчетов Монте-Карло, а именно – метод вероятностей прохождения. Благодаря применению данной методики было достигнуто приемлемое время расчета (сниженное на несколько порядков по сравнению с пошаговыми вычислениями) практически без потерь в точности.

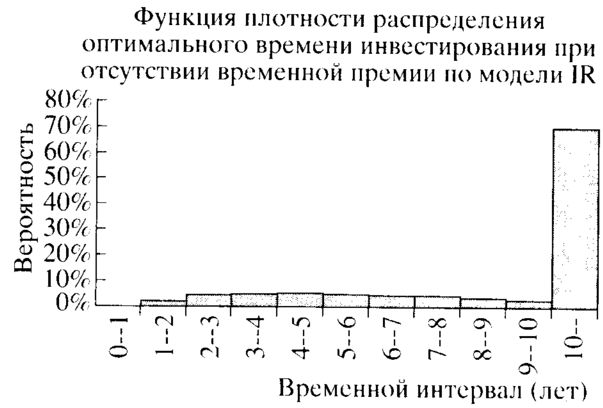

Рис. 2. Распределением оптимального времени начала инвестирования по временным интервалам при условии $\lambda = 0$.

Результаты расчетов, исходя из предположений модели Ингерсолла–Росса. Серия проведенных нами расчетов включала в себя как использование различных значений для ключевых параметров модели Ингерсолла–Росса, так и применение различных стохастических процессов для описания динамики ставки процента.

Для начала, мы попытались оценить функцию временного распределения для случая, когда ставка процента подчиняется стохастическому процессу (5), с параметром $\lambda = 0$. Как известно, этот простейший случай лег в основу более общей модели Ингерсолла–Росса. Нами был проведен ряд расчетов с использованием различных значений параметров σ и T. Наиболее типичный результат представлен на рис. 2, где $dr = \sigma\sqrt{r}\,d\omega$ – процесс для динамики мгновенной ставки процента; $\sigma = 0.025$ – параметр, характеризующий волатильность ставки; $I = 0.819$ – величина первоначальных инвестиций; $T = 5$ – продолжительность проекта (лет). Следует отметить, что за начальное значение ставки процента был выбран уровень безубыточности r^0, т.е. фактически мы оценивали временной лаг между началом инвестирования в соответствии с классической теорией и теорией реальных опционов.

Как наглядно видно из представленного графика, стохастический процесс, использованный авторами в теоретической модели, практически не соответствует реальности.

Согласно выводам модели Ингерсолла и Росса, инвестор будет ждать падения ставки процента до порогового уровня r^*. Однако расчеты показывают, что вероятность того, что процент при данных предположениях снизится с уровня безубыточности до порогового уровня за первые десять лет, для непродолжительных проектов (5 лет), составляет всего около 25–27%. Для более “длинных” проектов (20-летних) эта величина падает до 10%, а при некоторых соотношениях основных параметров – до 2–3%. Иными словами, если бы ставки действительно изменялись в соответствии со стохастическим законом, использованным в модели IR, инвестор вряд ли стал вкладывать средства в подобные проекты – время ожидания слишком велико.

Единственным специфическим параметром модели является показатель волатильности σ, однако, как показали проведенные расчеты, его влияние в данном случае практически не сказывается на общих выводах. И хотя абсолютно точных доказательств того, что ставка процента подчиняется тому или иному случайному процессу, нет, полученные результаты, на наш взгляд, свидетельствует в пользу того, что либо процесс, использованный Ингерсоллом и Россом, не вполне реалистичный, либо сама модель неадекватна в достаточной степени. Однако, как будет продемонстрировано далее, использование альтернативных процессов позволяет получать принципиально иные результаты, которые вполне согласуются с реальным положением дел, и в этой связи предположение относительно неправомочности использования исходного процесса в модели IR представляется нам более оправданным.

Случай расчетов ненулевых значений параметра λ представлен на рис. 3. Видно, что с ростом λ увеличивается вероятность более раннего принятия проекта, обусловленное тем, что положительное λ подразумевает ожидаемый рост ставок, поэтому при наличии положительной временной премии необходимо “успеть” произвести инвестиции в проект до роста ставок. Этим объясняется и некоторая смещенность локального максимума функции в сторону первых временных интервалов.

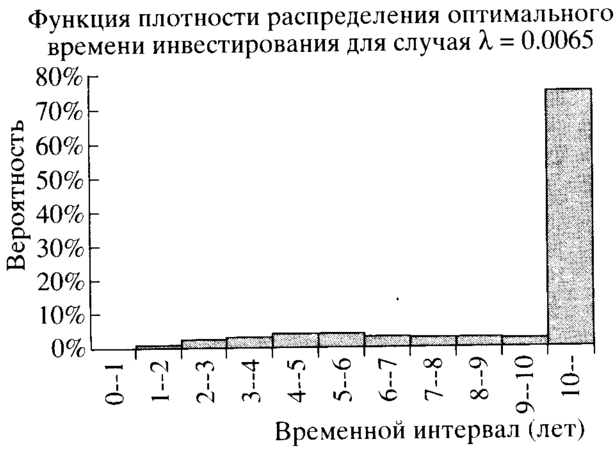

Рис. 3. Распределение оптимального времени инвестирования по интервалам при наличии временной премии $\lambda = 0.0065$.

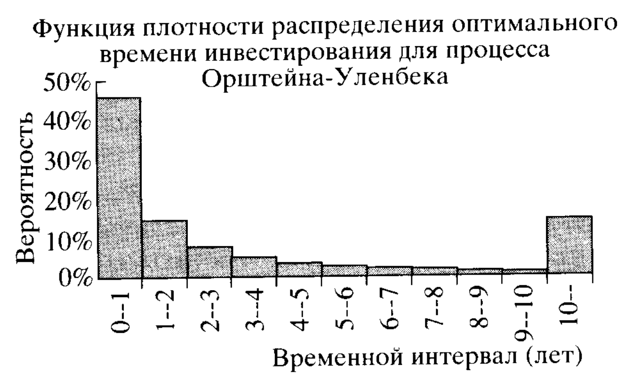

Рис. 4. Распределение оптимального времени инвестирования по временным интервалам в случае использования процесса Орнштейна–Уленбека в модели IR.

Оценка λ, предложенная в [17] ($\lambda = 0.0065$), обеспечивает некоторое "улучшение" временных показателей. От 30% до 40% сценариев заканчиваются снижением ставки до необходимого уровня за первое десятилетие, при этом до 16% – за первые два года. Однако необходимо подчеркнуть, что в данном случае речь идет о временной отсрочке инвестирования от момента, определенного согласно классической теории инвестирования. Фактически это время описывает "интуицию" инвестора, который на практике действительно откладывает финансирование проекта в тот момент, когда ортодоксальная теория настаивает на инвестировании. Таким образом, если бы реальная картина обстояла в точности так, как получается в результате моделирования, то инвестиционная активность в такой стране как, например, США (а именно на основе американских данных рассчитывалось значение временной премии λ) находилась бы на крайне низком уровне, что на самом деле не так. Таким образом, даже использование расширенного варианта броуновского процесса (5) в практических целях себя не оправдывает.

Вообще говоря, величина, подчиняющаяся броуновскому процессу, может сколь угодно далеко "уходить" от своего первоначального значения, и, если это экономически оправдано для случая спекулятивных цен на некоторые активы, то совершенно очевидно не подходит для описания динамики процентных ставок. Таким образом, из представленных выше расчетов видно, что, несмотря на всю теоретическую привлекательность использования стохастического процесса $dr = \lambda r dt + \sigma r^{1/2} d\omega$ для описания поведения ставки процента (данный процесс позволяет избежать случаев отрицательности процентных ставок), подобные процессы не вполне соответствуют реальности и, следовательно, не могут использоваться для практических расчетов в рамках данной модели.

Расчеты с использованием альтернативных процессов. Одним из наиболее часто используемых в практических расчетах процессов являются так называемые процессы Орнштейна–Уленбека (mean-reverting processes). В той или иной форме они представлены в ставших уже классическими работах Кокса, Ингерсолла и Росса (CIR model) [13], Васичека (Vasicek model) [18] и Лонгстаффа (Longstaff model) [19].

В наиболее распространенном случае подобные процессы записываются в виде

$$dx = \eta(x' - x)dt + \sigma d\omega,$$

где η – скорость возврата, x' – долгосрочный уровень величины x, т.е. уровень, вокруг которого колеблется текущий показатель. Действительно, ряд исследований подтверждают наличие подобных "естественных" долгосрочных уровней, например для нефтяных цен, определяемых исходя из уровня долгосрочных предельных издержек. Поэтому было бы логично предполагать сходное поведение процентных ставок на рынке, где естественный уровень соответствует долгосрочной кредитной политике государства.

Строго говоря, введение нового процесса в модель Ингерсолла–Росса потребовало бы использования численных методов расчета для определения стоимости инвестиционного опциона и определения пороговой ставки процента. Теоретически, решение уравнения (4) может быть выписано с помощью гипергеометрических функций. Однако нас, главным образом, интересует не стоимость инвестиционного опциона, а пороговое значение ставки процента, позволяющее определить оптимальную политику инвестора. С точки зрения использования численных методов, ситуация значительно усложняется тем, что необходимо найти единственную точку, где интегральная кривая, являющаяся решением (4), касается кривой NPV = $P(r, T) - I$. А отсутствие достаточного количества граничных условий затрудняет однозначное определение нужной функции.

В данной работе, для сопоставимости выводов, мы ограничимся приведением результатов моделирования динамики процента, исходя из значений r^0 и r^*, полученных при использовании аналитической формулы для случая процесса (5)[7]. Иными словами, мы повторили еще раз проведенные выше расчеты для r^0 и r^*, но уже с использованием процесса Орнштейна–Уленбека. Наиболее характерный из полученных нами результатов представлен на рис. 4.

За естественный уровень процента нами брался уровень безубыточности проекта; значение параметра η, характеризующего скорость возврата ставки, использовалось в диапазоне от 0.1 до 0.01. За естественное долгосрочное значение был взят уровень безубыточности r^0.

Как следует из проведенных расчетов, в случае использования процессов Орнштейна–Уленбека картина распределения получается совершенно иная. Так, за десятилетний интервал выходят не более 15–19% сценариев, при этом в более чем 60% случаев ставка падает до порогового уровня в первые два года. Необходимо также отметить смещенность максимума функции плотности распределения к первым зонам. Это обусловлено тем, что данный процесс достаточно быстро сходится, поэтому большинство историй уже в первых временных интервалах достигают точки поглощения. С течением времени все меньшее количество точек остается выше порогового уровня.

На наш взгляд, именно подобная картина наблюдается в реальности – инвесторы относительно недолго ждут момента, когда по их оценкам следует начинать инвестирование средств в реализацию проекта. Мало кто, имея права на проект, надолго отказывается от его реализации.

Из всего вышесказанного можно сделать один немаловажный вывод: используя адекватный стохастический процесс для описания динамики процентной ставки, инвестор, использующий выводы модели реальных опционов Ингерсолла – Росса, может не только оценить оптимальную доходность проекта, но и время ожидания, необходимое для того, чтобы иметь возможность получить эту ожидаемую доходность. Вообще говоря, данный вывод характерен не только для случая подобных простейших проектов, зависящих от ставки процента, но и для проектов, аналогичных рассматриваемым, например, в модели Пиндайка–Диксита. И единственной проблемой, возникающей при этом, является отсутствие достаточно точных механизмов, позволяющих однозначно оценить приемлемость того или иного случайного процесса для описания динамики основных модельных параметров.

Вообще говоря, разработанная методика дает возможность оценивать оптимальное время инвестирования не только в описанных выше случаях простейших инвестиционных проектов, но и в случае проектов с более сложной структурой денежных потоков. Для расчета оптимальной отсрочки нам необходимо лишь подобрать стохастический процесс, характеризующий динамику фазовой переменной и ее пороговый уровень. Если строго определить пороговое значение не удается, оценку порогового уровня фазовой переменной можно получить на основе, например, экспертных оценок. Таким образом, разработанная нами методика является в некоторой степени универсальной и действительно, с определенными допущениями, может использоваться в практических целях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе анализируется опционный подход к анализу эффективности инвестиций в условиях неопределенности, дается краткая характеристика основных моментов теории реальных опционов, анализируется опционная модель Ингерсолла–Росса. Необходимо еще раз подчеркнуть, что согласно опционному подходу именно степень неопределенности на рынке оказывает решающее влияние на инвестиционную активность участников.

Нами была разработана и практически реализована методика определения оптимального времени инвестирования, которая вполне может быть использована не только в теоретических исследованиях, но и при практическом анализе эффективности инвестиционных проектов.

[7] В принципе, разработанная методика дает возможность оценить оптимальную отсрочку инвестирования для произвольных стохастических процессов. В случае, если использование этих процессов не позволяет точно определить необходимое пороговое значение в рамках какой-либо аналитической модели, для получения уровня поглощения могут быть использованы экспертные оценки.

На основе полученных результатов можно сделать вывод относительно того, что использование исходного процесса в модели Ингерсолла--Росса в практических целях себя не оправдывает, поэтому для реальных расчетов более правомерно применять альтернативные стохастические процессы.

Как справедливо заметил Г. Шик в [8]: "Использование реальных опционов станет стандартным инструментом при анализе бюджетной политики фирм в ближайшие десять–двадцать лет. Фирмы, игнорирующие их, будут постоянно упускать выгодные инвестиционные проекты. Более того, они будут продавать эти, невыгодные на их взгляд, проекты фирмам, знающим им истинную цену. Предприятия, активно использующие опционный подход, смогут приобретать недооцененные проекты и продавать переоцененные. При этом по другую сторону этих сделок будут находиться фирмы, не уделяющие должного внимания реальным опционам. С течением времени эти фирмы будут медленно, но неуклонно падать в цене".

Авторы признательны рецензенту за ценные замечания и рекомендации, высказанные по поводу данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ingersoll J., Ross S.* Waiting to Invest: Investment and Uncertainty // J. of Business. 1992. № 65.
2. *Ross S.* Uses, Abuses, and Alternatives to the Net-Present-Value Rule // Financial Management. 1995. V. 24. № 3.
3. *Dixit A., Pindyck R.* Investment under Uncertainty // Princeton University Press. Princeton: NJ, 1994.
4. *McDonald R., Seigel D.* The Value of Waiting to Invest // Quarterly J. of Economics. 1986. № 101.
5. *Cukierman A.* The Effects of Uncertainty on Investment under Risk Neutrality with Endogenous Information // J. of Political Economy. 1980. № 88.
6. *Bernanke B.* Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment // Quarterly J. of Economics. 1983. № 98.
7. *Demers M.* Investment Under Uncertainty, Irreversibility and the Arrival of Information Over Time // Review of Economic Studies. 1991. № 58.
8. *Sick G.* Real Options. Handbook in OR & MS. Elsevier Science B.V. 1995. V. 9.
9. *Herbelot O.* Option Valuation of Flexible Investments: The Case of Environmental Investments in the Electric Power Industry. Unpublished Ph. D. dissertation. MIT. 1992. May.
10. *Titman S.* Urban Land Prices under Uncertainty. American Economic Rev. 1985. № 75.
11. *Paddock J., Siegel D., Smith J.* Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases // Quarterly J. of Economics. 1988. № 103.
12. *Tourinho O.A.* The Valuation of Reserves of Natural Resources: An Option Pricing Approach. Unpublished Ph.D. dissertation, University of California, Berkley, 1979.
13. *Cox J., Ingersoll J. and Ross S.* A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. 1985. № 53.
14. *Van Deventer D.R., Imai K.* Financial Risk Analytics. IRWIN Professional Publishing, 1997.
15. *Metron R.* Theory of Rational Option Pricing // Bell J. of Economics and Management Science. 1973. № 4.
16. *Поманский А.Б.* Чего и почему ждут банки // Коммерсант-weekly. 1996. № 6.
17. Ibbotson Associates Stocks, Bonds, Bills, and Inflation 1987 Yearbook. Chicago: Ibbotson Associates Inc., 1987.
18. *Vasicek O.* An Equilibrium Characterization of the Term Structure // J. of Financial Economics. 1997. № 5.
19. *Longstaff F.* A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates // J. of Financial Economics. 1989. August.

Поступила в редакцию
24.06.98 г.

Real Options: Optimal Moment for Investing

E. A. Kovalishin, A. B. Pomansky

In the present article, the option approach to analysis of investment efficiency under uncertainty is examined. A brief description of the main features of the real options theory is given. The Ingersoll-Ross option model is analyzed. A technique of determining the optimal time of investing has been developed and practically realized. A number of conclusions have been made about the practical application of stochastic processes in analyzing investment projects.